複雑界面における調和場解析の次元間対応(非線形波動の数理と応用)

水田, 洋

数理解析研究所講究録
1483巻 2006年 175-187

複雑界面における調和場解析の次元間対応

北大大学院工学研究科　水　田　　洋　(Yo Mizuta)
Grad. Sch. of Engineering, Hokkaido Univ.

1　はじめに

磁場と流体の相互作用の結果，磁性流体の自由表面に生じる特異変形の解析では，任意の界面形状・外部磁場分布において制限なく使える調和場解析が必須である．**調和性** (非発散性・非回転性) と **界面条件** を同時に満たす磁場が近似なく界面だけで求められると，これから計算した磁気応力差にもとづいて，界面形状を決定したりその時間変動を調べることが正確かつ効率的にできる．

2次元解析では，このような解析法を，複素解析を利用して組み立てた．調和性を考慮するには，複素磁場 に 解析性 を付与し，これから導かれる Hilbert変換 を利用する．界面磁場は，既知の外部磁場から直接計算される 基本場 に界面磁場方程式 を解いて決める 誘導場 を加え，全体で界面条件を満たすようにする．「外部および内部線磁極と透磁性円筒」など，界面磁場の解析解が知られている場合において，本方法による結果が解析解と一致することを確認した [1, 2].

この手続きを3次元解析のために組み直す場合，複素解析はもちろん使えないが，2次元複素解析の解析要素を次元間対応でひとつひとつ3次元ベクトル解析に置き換え，界面条件を調和場方程式へ取り込むと，**3次元界面磁場方程式** が導かれる．本稿では，この過程を述べると共に，両解析の違いも指摘する．

2　2次元複素解析における調和場解析

次節以降に述べる3次元ベクトル解析との対応のため，本節では，2次元複素解析についてまとめる [1, 2].

透磁率 μ_j が異なる流体領域 $(j=1)$・真空領域 $(j=2)$ の界面において，磁場から流体への作用となる磁気応力差 $T=[1/(2\mu_j)]\,(\mu_1\mu_2 h_\mathrm{s}^2+b_\mathrm{n}^2)$ を決めるために必要な，磁場の接線成分 $h_\mathrm{s}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{s}$ と磁束密度の法線成分 $b_\mathrm{n}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{n}$ を求める．ここで，$\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{n}$ は接線単位ベクトル・法線単位ベクトル，$[\cdots]$ は界面を横切る値の跳び (上 − 下) である．磁場 $\boldsymbol{h}_j=(h_{xj},h_{yj})$, 磁束密度 $\boldsymbol{b}_j=(b_{xj},b_{yj})=\mu_j\boldsymbol{h}_j$ は，調和性 $\nabla\cdot\boldsymbol{b}_j=0$, $\nabla\times\boldsymbol{h}_j=\boldsymbol{0}$ を，また界面磁場 h_s, b_n は界面条件 $[h_\mathrm{s}]=0$, $[b_\mathrm{n}]=0$ を満たす．

調和性と界面条件を満たす調和場を簡潔に求めるため，複素磁場 $f_j(z)=b_{xj}-ib_{yj}=\mu_j(h_{xj}-ih_{yj})$ と複素界面磁場 $g_j\equiv-\mu_j h_\mathrm{s}-ib_\mathrm{n}=f_j(z)e^{i\theta}=g_{j\mathrm{r}}-ig_{j\mathrm{i}}$ を導入した．ここで θ は界面勾配角で，θ に共役な空間収縮率 τ と共に，Flat Space $Z=X+iY$ から Real Space $z=x+iy$ への写像変換式 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z=e^{i\theta\pm\tau}$ (複号上下は真空領域・流体領域) を与える．

複素磁場・界面磁場などは，

$$f_j(z)=f_j^0(z)+f_j^1(z),\quad g_j=g_j^0+g_j^1,\quad -h_\mathrm{s}=-h_\mathrm{s}^0-h_\mathrm{s}^1,\quad b_\mathrm{n}=b_\mathrm{n}^0+b_\mathrm{n}^1 \tag{1}$$

のように，**基本場** (上付き添え字 0) と **誘導場** (1) に分ける．基本場は，界面が存在する前に既知として与えた任意の外部磁場から直接計算する．

$$\begin{cases}-h_\mathrm{s}^0\equiv\qquad\left(g_{2\mathrm{r}}^0+g_{1\mathrm{r}}^0\right)/(\mu_2+\mu_1)\,,\\ \;\;b_\mathrm{n}^0\equiv\left(g_{2\mathrm{i}}^0/\mu_2+g_{1\mathrm{i}}^0/\mu_1\right)/(1/\mu_2+1/\mu_1)\,.\end{cases} \tag{2}$$

Flat Space で既知とした外場磁場分布と写像変換式に 解析性 があると，$f_j^1(z)$ に調和性が付与され，また，**伸縮 Hilbert 変換**

$$\begin{cases}\hat{H}_2\equiv e^{-\tau}\hat{H}e^{\tau},\\ \hat{H}_1\equiv e^{\tau}\hat{H}e^{-\tau},\end{cases}\quad \hat{H}h(X')\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}X'}{X'-X}h(X') \tag{3}$$

で $g_{j\mathrm{i}}^1=\pm\hat{H}_j g_{j\mathrm{r}}^1$, $g_{j\mathrm{r}}^1=\mp\hat{H}_j g_{j\mathrm{i}}^1$ と表された関係を利用できるようになる．

誘導場は，基本場だけでは満たすことのできない界面条件を，基本場と合わせて満たすように決める．このとき，次の **界面条件関数** を使うと，界面条件を考察し，界面磁場を求めることが見通しよくできる．

$$\begin{cases}\gamma_\mathrm{s}\equiv g_2^*/\mu_2-g_1/\mu_1=-[h_\mathrm{s}]+i\,(1/\mu_1+1/\mu_2)\,b_\mathrm{n},\\ \gamma_\mathrm{n}\equiv\qquad g_2^*+g_1\qquad=-(\mu_1+\mu_2)\,h_\mathrm{s}+i[b_\mathrm{n}].\end{cases} \tag{4}$$

これらから，誘導場を決めるための **界面磁場方程式** が導かれる．

$$\begin{cases} -\left(\mu_2\hat{H}_2+\mu_1\hat{H}_1\right)h^1_{\mathrm{s}}=-(\mu_2+\mu_1)\tilde{h}+\left(\hat{H}_2-\hat{H}_1\right)\tilde{b}, \\ \left(\hat{H}_2/\mu_2+\hat{H}_1/\mu_1\right)b^1_{\mathrm{n}}=(1/\mu_2+1/\mu_1)\tilde{b}+\left(\hat{H}_2-\hat{H}_1\right)\tilde{h}, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \tilde{h}\equiv \quad (g^0_{2\mathrm{i}}-g^0_{1\mathrm{i}})/(\mu_2+\mu_1), \\ \tilde{b}\equiv (g^0_{2\mathrm{r}}/\mu_2-g^0_{1\mathrm{r}}/\mu_1)/(1/\mu_2+1/\mu_1). \end{cases} \tag{6}$$

(5) は，h^1_{s}, b^1_{n} それぞれについて，互いに独立に解くことができる．この方程式は線形であるが，界面変形や外部磁場の大きさによる制限を受けない．

3 Flat Space と Real Space の対応関係

2 次元複素解析で，Flat Space $X+iY$ と Real Space $x+iy$ の座標間の対応関係は，写像変換式 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z$ の解析性に基づいている．$\underline{\boldsymbol{X}}\equiv(x_X\ y_X)$, $\underline{\boldsymbol{Y}}\equiv(x_Y\ y_Y)$ を定義すれば (x_X は $x(X,Y)$ の X による偏微分)，Cauchy-Riemann の関係により $\underline{\boldsymbol{X}}\underline{\boldsymbol{Y}}^t=0$ となり，$\underline{\boldsymbol{X}}$ と $\underline{\boldsymbol{Y}}$ は自動的に直交する．

これに対して，3 次元ベクトル解析では，直交曲線座標系を用いる．Flat Space の座標 (X,Y,Z) と Real Space の座標 (x,y,z) の間に $x(X,Y,Z)$, $y(X,Y,Z)$, $z(X,Y,Z)$ という関数関係があり，$Z=0$ が界面を表すとする．このとき，次のように，Flat Space から Real Space への変換行列 R，Real Space から Flat Space への変換行列 F を考える．

$$\mathsf{R}\equiv\begin{pmatrix} x_X & y_X & z_X \\ x_Y & y_Y & z_Y \\ x_Z & y_Z & z_Z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{\boldsymbol{X}}\\ \underline{\boldsymbol{Y}}\\ \underline{\boldsymbol{Z}}\end{pmatrix},\quad \mathsf{F}\equiv\begin{pmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{pmatrix}=\left(\overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{Y}}\,\overline{\boldsymbol{Z}}\right)=\mathsf{R}^{-1}. \tag{7}$$

これらは，2 次元複素解析の写像変換式 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}Z$, $\mathrm{d}Z/\mathrm{d}z$ に対応する．ベクトル $\underline{\boldsymbol{Z}}$ は，X =const., Y =const. として Z のみを変化させ，Real Space 内に描かれる曲線の接線ベクトルであり，これから接線単位ベクトル $\boldsymbol{t}_Z=\underline{\boldsymbol{Z}}/|\underline{\boldsymbol{Z}}|$ を定義する．$\boldsymbol{t}_X=\underline{\boldsymbol{X}}/|\underline{\boldsymbol{X}}|$, $\boldsymbol{t}_Y=\underline{\boldsymbol{Y}}/|\underline{\boldsymbol{Y}}|$ についても同様である．一方，$\overline{\boldsymbol{Z}}$ は，$Z(x,y,z)$ =const. という曲面に対する法線ベクトルである．

直交曲線座標系を使うことにすると，接線ベクトル系 $\underline{\boldsymbol{X}}$, $\underline{\boldsymbol{Y}}$, $\underline{\boldsymbol{Z}}$ は互いに

直交する．さらに，$\mathsf{F}=\mathsf{R}^{-1}$ より，各方向は法線ベクトル系 $\overline{\boldsymbol{X}}, \overline{\boldsymbol{Y}}, \overline{\boldsymbol{Z}}$ と一致することが示され，単位ベクトル系 $\boldsymbol{t}_X, \boldsymbol{t}_Y, \boldsymbol{t}_Z$ が共通になる [3].

4　3次元調和場方程式

4.1　Greenの定理からの導出 [4]

流体領域・真空領域それぞれの内部を V，それらを囲む (界面+無限遠) が構成する表面を S，それらの体積素と面積素ベクトルを $\mathrm{d}V'_{\mathrm{R}}, \mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}$ とすれば，２関数 ϕ, ψ についてのGreenの定理は，

$$\iiint_V (\phi'\Delta'_{\mathrm{R}}\psi - \psi\Delta'_{\mathrm{R}}\phi')\,\mathrm{d}V'_{\mathrm{R}} = \oint_S \{\phi'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi) - \psi(\nabla'_{\mathrm{R}}\phi')\}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}} \tag{8}$$

となる．ここで，積分に関わるソース点の座標ベクトル，微分，および関数には $\boldsymbol{r}', \nabla'_{\mathrm{R}}, \Delta'_{\mathrm{R}}, \phi'$ のように “$'$” をつけて，観測点の座標ベクトル $\boldsymbol{r}$ やそれに関わる微分，関数などと区別する．また，R はReal Spaceを表し，Flat Spaceと区別する．

(8) における $\phi(\boldsymbol{r}')$ として $\nabla'_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$, $\nabla'_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{f} = 0$ を満たす調和場を $\boldsymbol{f} = \nabla'_{\mathrm{R}}\phi'$ と導くポテンシャル，また，$\psi(|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)$ にPoisson方程式 $\Delta'_{\mathrm{R}}\psi = \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$ の解 (基本解) を用いれば (Table 1参照)，$\Delta'_{\mathrm{R}}\phi' = 0$ より，

$$\phi = \oint_S \phi'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) - \oint_S \psi(\nabla'_{\mathrm{R}}\phi'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) \tag{9}$$

となる．ここで両辺に ∇_{R} を作用させる．これは右辺では ψ にのみ作用するが，$\nabla_{\mathrm{R}}\psi = -\nabla'_{\mathrm{R}}\psi$ である．また，無限遠で ϕ', ψ が消滅する境界条件を

Table 1: Basic solutions of Poisson equaiton and their derivatives in two- and three-dimension

Dim.	$\psi(\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert)$	$\nabla'_{\mathrm{R}}\psi$	$\Delta'_{\mathrm{R}}\psi$
2	$\dfrac{\ln\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert}{2\pi}$	$\dfrac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{2\pi\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert^2}$	$\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$
3	$\dfrac{-1}{4\pi\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert}$	$\dfrac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{4\pi\lvert\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\rvert^3}$	$\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})$

課して $\oint_S \nabla'_{\mathrm{R}}(\phi'\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{0}$ となることを用いれば (以後，このような場合を $\{\cdots\}_{\mathrm{zero}}$ と表す)，

$$\oint_S \phi'\nabla_{\mathrm{R}}(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) = \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\phi')(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) \tag{10}$$

$$\left[\because \oint_S \phi'\nabla'_{\mathrm{R}}(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) = \left\{\oint_S \nabla'_{\mathrm{R}}(\phi'\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}})\right\}_{\mathrm{zero}} - \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\phi')(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}})\right]$$

となる．したがって，(9) から次の調和場方程式が導かれる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f} = \nabla_{\mathrm{R}}\phi &= \oint_S \phi'\nabla_{\mathrm{R}}(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) - \oint_S (\nabla_{\mathrm{R}}\psi)(\nabla'_{\mathrm{R}}\phi'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) \\ &= \oint_S \boldsymbol{f}'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) + \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)(\boldsymbol{f}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}).\end{aligned} \tag{11}$$

ここで $\nabla'_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{f}' = 0$ により，(11) はさらに次のように書き換えられる．

$$\boldsymbol{f} = \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)\times(\boldsymbol{f}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) + \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)(\boldsymbol{f}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}). \tag{12}$$

$$\left[\begin{aligned}&\because\ (\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)\times(\boldsymbol{f}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) = \boldsymbol{f}'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) - (\boldsymbol{f}'\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}, \\ &\quad \oint_S (\boldsymbol{f}'\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}} = \left\{\oint_S \nabla'_{\mathrm{R}}\cdot(\boldsymbol{f}'\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}\right\}_{\mathrm{zero}} - \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{f}')\psi\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}\end{aligned}\right]$$

4.2 Cauchy の積分公式からの導出 [4]

2 次元複素解析における Cauchy の積分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')\mathrm{d}z'}{z'-z}, \quad [z : C \text{ 内の点}] \tag{13}$$

は，閉積分路 C 内で $f(z)$ が解析的であることを前提としている．これは調和場の性質 $\nabla'_{\mathrm{R}}\times\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{0}$, $\nabla'_{\mathrm{R}}\cdot\boldsymbol{f}' = 0$ に相当しており，(13) を書き直せば，3 次元解析でも使う前節の調和場方程式になるはずである．

複素量とベクトル量は，以下のように対応する．

(14)

2 次元複素解析	3 次元ベクトル解析
$f(z') = u' - iv'$	$\boldsymbol{f}' = (u', v')$
$\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{z'-z} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(x'-x)-i(y'-y)}{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$	$\nabla'_{\mathrm{R}}\psi = (\boldsymbol{x}\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi,\ \boldsymbol{y}\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)$
$\mathrm{d}z' = \mathrm{d}x' + i\mathrm{d}y'$	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = (\mathrm{d}x', \mathrm{d}y') = \boldsymbol{z}\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}$

ここで，$\nabla'_{\mathrm{R}}\psi = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{(x'-x,\, y'-y)}{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$ は，Table 1に既に現れている．また，単位ベクトル $\boldsymbol{z}$ は2次元平面に垂直 (3次元ベクトル解析でこれに対応するのは $\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{z}$ は界面を横切る方向)，線素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ は領域内部を左に見て進む向き，面積素ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}$ は外向きである．以上より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\frac{f(z')\mathrm{d}z'}{z'-z} &= \frac{u'-iv'}{i}\{(\boldsymbol{x}\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi) - i(\boldsymbol{y}\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)\}(\mathrm{d}x'+i\mathrm{d}y') \\
&= \frac{u'-iv'}{i}\{-\boldsymbol{z}\cdot(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) + i(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}})\} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となる．したがって，(13) の閉積分路 C を表面 S で置き換え，実部・虚部同士を比較すれば，

$$
\left\{
\begin{aligned}
u &= \oint_S \{u'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) + v'\boldsymbol{z}\cdot(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}})\}, \\
v &= \oint_S \{v'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) - u'\boldsymbol{z}\cdot(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}})\}.
\end{aligned}
\right. \qquad (16)
$$

2次元複素解析では，$\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}$ が $\boldsymbol{z}$ に平行で，$\boldsymbol{z}\cdot(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}})\boldsymbol{z}$ となることを考慮しながら (16) の両式をまとめれば，次のベクトル関係式が得られる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f} &= \oint_S \boldsymbol{f}'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) + \oint_S \boldsymbol{f}'\times(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) \qquad (17) \\
&= \oint_S \boldsymbol{f}'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) + \oint_S (\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)(\boldsymbol{f}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) - \oint_S (\boldsymbol{f}'\cdot\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

(18) の右辺第1項と第3項を合わせると，確かに前節の調和場方程式 (12) が再導出される．

(16) において，無限遠の表面における積分の寄与を無視し，界面を水平として観測点座標 $\boldsymbol{r}$ を界面上に置くと，$\nabla'_{\mathrm{R}}\psi$ は界面と常に平行になり，$\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}} = 0$，$\oint_S \boldsymbol{z}\cdot(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}) = \mp\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}x'}{\pi(x'-x)}$ より (複号上下は真空領域・流体領域に対応，$\boldsymbol{r}$ が界面上にあるので右辺は2倍)，

$$
u = \mp\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v'\mathrm{d}x'}{x'-x}, \quad v = \pm\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u'\mathrm{d}x'}{x'-x} \qquad (19)
$$

となる．これは u, v の間の Hilbert 変換に他ならない．

5 界面条件と界面磁場

界面条件と界面磁場について議論するために，流体領域 $(j=1)$・真空領域 $(j=2)$ の調和場を区別した上で，互いに直交する接線方向 $(I=X,Y)$ と法線方向 $(I=Z)$ の成分に分ける．

$$\boldsymbol{f}_j \equiv g_{jX}\boldsymbol{t}_X + g_{jY}\boldsymbol{t}_Y + g_{jZ}\boldsymbol{t}_Z, \quad \boldsymbol{t}_I = \underline{\boldsymbol{X}}_I/|\underline{\boldsymbol{X}}_I|. \tag{20}$$

μ_j を透磁率とすれば，各成分は，接線磁場 h_X, h_Y・法線磁束密度 b_Z と次の関係がある．

$$\begin{pmatrix} h_X \\ h_Y \\ b_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{jX}/\mu_j \\ g_{jY}/\mu_j \\ g_{jZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_X/\mu_j \\ \boldsymbol{t}_Y/\mu_j \\ \boldsymbol{t}_Z \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{f}_j, \quad \begin{pmatrix} \mu_j h_X \\ \mu_j h_Y \\ b_Z/\mu_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{jX} \\ g_{jY} \\ g_{jZ}/\mu_j \end{pmatrix}. \tag{21}$$

界面条件は次のように表され，h_X, h_Y, b_Z は両領域で共通になる．

$$\begin{cases} 0 = [h_{X,Y}] = [g_{jX,jY}/\mu_j], \\ 0 = \ [b_Z] \ = \ \ [g_{jZ}]. \end{cases} \tag{22}$$

界面が存在する前に既知として与えた任意の外部磁場 $\boldsymbol{h}^0$ から，$\boldsymbol{f}_j^0 = \mu_j \boldsymbol{h}^0$, $g_{jI}^0 = \boldsymbol{t}_I \cdot \boldsymbol{f}_j^0$ $(I=X,Y,Z)$ のように定義した基本場は，そのままでは界面条件 (22) を満たさない．このため，$\boldsymbol{f}_j = \boldsymbol{f}_j^0 + \boldsymbol{f}_j^1$, $g_{jI} = g_{jI}^0 + g_{jI}^1$ が界面条件を満たすように，誘導場 $\boldsymbol{f}_j^1$, $g_{jI}^1 = \boldsymbol{t}_I \cdot \boldsymbol{f}_j^1$ を決める．

(21) 左について，$j=1,2$ の差をとれば，

$$\begin{cases} 0 = [h_X] = \dfrac{g_{2X}}{\mu_2} - \dfrac{g_{1X}}{\mu_1} = \left(\dfrac{g_{2X}^0}{\mu_2} - \dfrac{g_{1X}^0}{\mu_1}\right) + \left(\dfrac{g_{2X}^1}{\mu_2} - \dfrac{g_{1X}^1}{\mu_1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \equiv \left(\dfrac{1}{\mu_2} + \dfrac{1}{\mu_1}\right)\tilde{b}_X + \left(\dfrac{g_{2X}^1}{\mu_2} - \dfrac{g_{1X}^1}{\mu_1}\right), \\ 0 = [h_Y] = \dfrac{g_{2Y}}{\mu_2} - \dfrac{g_{1Y}}{\mu_1} = \left(\dfrac{g_{2Y}^0}{\mu_2} - \dfrac{g_{1Y}^0}{\mu_1}\right) + \left(\dfrac{g_{2Y}^1}{\mu_2} - \dfrac{g_{1Y}^1}{\mu_1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \equiv \left(\dfrac{1}{\mu_2} + \dfrac{1}{\mu_1}\right)\tilde{b}_Y + \left(\dfrac{g_{2Y}^1}{\mu_2} - \dfrac{g_{1Y}^1}{\mu_1}\right), \\ 0 = [b_Z] = g_{2Z} - g_{1Z} = \left(g_{2Z}^0 - g_{1Z}^0\right) + \left(g_{2Z}^1 - g_{1Z}^1\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \equiv (\mu_2 + \mu_1)\tilde{h}_Z + \left(g_{2Z}^1 - g_{1Z}^1\right). \end{cases} \tag{23}$$

ここで，$\tilde{b}_{X,Y}$, $\tilde{h}_Z$ は基本場から定義した既知量で，(23) は，g^1_{jI} を決めるための条件を与える．他方，(21) 右について，$j=1,2$ の和をとれば，

$$\begin{cases} (\mu_2+\mu_1)\,h_X = g_{2X}+g_{1X} = & \left(g^0_{2X}+g^0_{1X}\right)+\left(g^1_{2X}+g^1_{1X}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\equiv & (\mu_2+\mu_1)\,h^0_X+(\mu_2+\mu_1)\,h^1_X, \\ (\mu_2+\mu_1)\,h_Y = g_{2Y}+g_{1Y} = & \left(g^0_{2Y}+g^0_{1Y}\right)+\left(g^1_{2Y}+g^1_{1Y}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\equiv & (\mu_2+\mu_1)\,h^0_Y+(\mu_2+\mu_1)\,h^1_Y, \\ \left(\dfrac{1}{\mu_2}+\dfrac{1}{\mu_1}\right)b_Z = \dfrac{g_{2Z}}{\mu_2}+\dfrac{g_{1Z}}{\mu_1} = & \left(\dfrac{g^0_{2Z}}{\mu_2}+\dfrac{g^0_{1Z}}{\mu_1}\right)+\left(\dfrac{g^1_{2Z}}{\mu_2}+\dfrac{g^1_{1Z}}{\mu_1}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\equiv & \left(\dfrac{1}{\mu_2}+\dfrac{1}{\mu_1}\right)b^0_Z+\left(\dfrac{1}{\mu_2}+\dfrac{1}{\mu_1}\right)b^1_Z. \end{cases} \tag{24}$$

すなわち，界面磁場 $h_{X,Y}, b_Z$ それぞれは，基本場だけから決まる部分 $h^0_{X,Y}$, b^0_Z と，誘導場 g^1_{jI} から決まる部分 $h^1_{X,Y}, b^1_Z$ に分けられる．

(23),(24) の成分が同じ式の組から，g^1_{jI} を $h^1_{X,Y}, b^1_Z$ で表す式が得られる．

$$\begin{pmatrix} g^1_{2X} \\ g^1_{1X} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_2 h^1_X-\tilde{b}_X \\ \mu_1 h^1_X+\tilde{b}_X \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g^1_{2Y} \\ g^1_{1Y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_2 h^1_Y-\tilde{b}_Y \\ \mu_1 h^1_Y+\tilde{b}_Y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} g^1_{2Z} \\ g^1_{1Z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b^1_Z-\mu_2\tilde{h}_Z \\ b^1_Z+\mu_1\tilde{h}_Z \end{pmatrix}. \tag{25}$$

以下には，基本場 $\boldsymbol{f}^0_j=\mu_j\boldsymbol{h}^0$, $g^0_{jI}=\boldsymbol{t}_I\cdot\boldsymbol{f}^0_j$ から直接定義される量を示す．

$$\tilde{b}_{X,Y}=0,\quad \tilde{h}_Z=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\boldsymbol{t}_Z\cdot\boldsymbol{h}^0,\quad h^0_{X,Y}=\boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\boldsymbol{h}^0,\quad b^0_Z=\frac{2\boldsymbol{t}_Z\cdot\boldsymbol{h}^0}{1/\mu_2+1/\mu_1}. \tag{26}$$

6　3次元界面磁場方程式

6.1　界面条件の調和場方程式への組み込み

調和場方程式 (12) は，S の内部で $\boldsymbol{f}$ が調和的であることを前提とした積分方程式なので，もし $\boldsymbol{f}$ に特異点があれば修正が必要になる．これは，次のような簡潔な形にまとめられる．「特異点による場を基本場として除去すれば，誘導場 $\boldsymbol{f}^1_j$ に対して調和場方程式が使える．」

観測点 $\boldsymbol{r}$ が S 上 (界面上) にあるので，(12) の右辺は 2 倍する．面積分は Flat Space で $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}=\mp\iint_I |\underline{\boldsymbol{X}}'|\,|\underline{\boldsymbol{Y}}'|\,\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'\boldsymbol{t}'_Z$ のように行う．真空領域/流体領域について $\mathrm{d}\boldsymbol{S}'_{\mathrm{R}}$ の向きは逆になるが，$\boldsymbol{t}'_Z$ は常に流体領域の外向きとす

る．複号はこれを反映する．また I は，Flat Space の界面を表す．以上により，ベクトル演算子 $\hat{\boldsymbol{G}}$ を用いて，調和場方程式 (12) を次のように表す．

$$\boldsymbol{f}_j^1 = \boldsymbol{t}_Z \times (\boldsymbol{f}_j^1 \times \boldsymbol{t}_Z) + \boldsymbol{t}_Z(\boldsymbol{f}_j^1 \cdot \boldsymbol{t}_Z) = \mp \left\{ \hat{\boldsymbol{G}} \times (\boldsymbol{f}_j^1 \times \boldsymbol{t}_Z) + \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{f}_j^1 \cdot \boldsymbol{t}_Z) \right\}, \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{G}} F(X,Y) \equiv 2 \iint_I |\underline{\boldsymbol{X}}'||\underline{\boldsymbol{Y}}'| \mathrm{d}X' \mathrm{d}Y' (\nabla'_{\mathrm{R}} \psi) F(X', Y'). \tag{28}$$

ここで (27) 式第 2 辺は，恒等変形である．調和場方程式を簡潔に表すため，$\hat{\boldsymbol{G}}$ の被演算量の引数には "$\prime$" をつけていないが，被演算量は $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{t}'_{X,Y,Z}$ にも依存するベクトル量・スカラー量である．

(25) をまとめて $g^1_{jX,jY} = \mu_j h^1_{X,Y} \mp \tilde{b}_{X,Y}$, $g^1_{jZ} = b^1_Z \mp \mu_j \tilde{h}_Z$ と表し，$\boldsymbol{f}_j^1 = g^1_{jX} \boldsymbol{t}_X + g^1_{jY} \boldsymbol{t}_Y + g^1_{jZ} \boldsymbol{t}_Z$ に用いると，

$$\boldsymbol{f}_j^1 \times \boldsymbol{t}_Z = g^1_{jY} \boldsymbol{t}_X - g^1_{jX} \boldsymbol{t}_Y = -\mu_j \boldsymbol{h}^1 \pm \tilde{\boldsymbol{b}}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{h}^1 \equiv h^1_X \boldsymbol{t}_Y - h^1_Y \boldsymbol{t}_X, \quad \tilde{\boldsymbol{b}} \equiv \tilde{b}_X \boldsymbol{t}_Y - \tilde{b}_Y \boldsymbol{t}_X, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{f}_j^1 \cdot \boldsymbol{t}_Z = g^1_{jZ} = b^1_Z \mp \mu_j \tilde{h}_Z. \tag{31}$$

(27) に (29),(31) を代入し，未知量 $\boldsymbol{h}^1(h^1_{X,Y})$, b^1_Z を左辺にまとめれば，

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{t}_Z \pm \hat{\boldsymbol{G}}\right) \left(\times \mu_j \boldsymbol{h}^1 - b^1_Z\right) = \pm \left(\boldsymbol{t}_Z \pm \hat{\boldsymbol{G}}\right) \left(\times \tilde{\boldsymbol{b}} - \mu_j \tilde{h}_Z\right), \\ \left(\boldsymbol{t}_Z \pm \hat{\boldsymbol{G}}\right) \left(\times \boldsymbol{h}^1 - b^1_Z/\mu_j\right) = \pm \left(\boldsymbol{t}_Z \pm \hat{\boldsymbol{G}}\right) \left(\times \tilde{\boldsymbol{b}}/\mu_j - \tilde{h}_Z\right). \end{cases} \tag{32}$$

(32) のそれぞれの式について，$j = 1, 2$ の和をとれば，

$$\begin{cases} \left(p\boldsymbol{t}_Z + m\hat{\boldsymbol{G}}\right) \times \boldsymbol{h}^1 - 2\boldsymbol{t}_Z b^1_Z = 2\hat{\boldsymbol{G}} \times \tilde{\boldsymbol{b}} - \left(m\boldsymbol{t}_Z + p\hat{\boldsymbol{G}}\right) \tilde{h}_Z, \\ 2\boldsymbol{t}_Z \times \boldsymbol{h}^1 - \left(P\boldsymbol{t}_Z + M\hat{\boldsymbol{G}}\right) b^1_Z = \left(M\boldsymbol{t}_Z + P\hat{\boldsymbol{G}}\right) \times \tilde{\boldsymbol{b}} - 2\hat{\boldsymbol{G}} \tilde{h}_Z. \end{cases} \tag{33}$$

また差をとれば，

$$\begin{cases} \left(m\boldsymbol{t}_Z + p\hat{\boldsymbol{G}}\right) \times \boldsymbol{h}^1 - 2\hat{\boldsymbol{G}} b^1_Z = 2\boldsymbol{t}_Z \times \tilde{\boldsymbol{b}} - \left(p\boldsymbol{t}_Z + m\hat{\boldsymbol{G}}\right) \tilde{h}_Z, \\ 2\hat{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{h}^1 - \left(M\boldsymbol{t}_Z + P\hat{\boldsymbol{G}}\right) b^1_Z = \left(P\boldsymbol{t}_Z + M\hat{\boldsymbol{G}}\right) \times \tilde{\boldsymbol{b}} - 2\boldsymbol{t}_Z \tilde{h}_Z. \end{cases} \tag{34}$$

ただし，$p \equiv \mu_2 + \mu_1$, $m \equiv \mu_2 - \mu_1$, $P \equiv 1/\mu_2 + 1/\mu_1$, $M \equiv 1/\mu_2 - 1/\mu_1$.

(33),(34) からは，どの接線単位ベクトルと内積をとるかに応じ，方程式が幾種類か導かれる．ここでは，(34) と $\boldsymbol{t}_Z$, $\boldsymbol{t}_X$ との内積である (35) と，(33)

と $\boldsymbol{t}_Z$, $\boldsymbol{t}_{X,Y}$ との内積である (36) (複号上下は $\boldsymbol{t}_X$, $\boldsymbol{t}_Y$ に対応) を掲げる.

$$\begin{cases} p\left(\boldsymbol{t}_Z\times\hat{\boldsymbol{G}}\right)\cdot\boldsymbol{h}^1-\left(2\boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)b_Z^1 &= -\left(p+m\boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)\tilde{h}_Z, \\ \left(2\boldsymbol{t}_X\times\hat{\boldsymbol{G}}\right)\cdot\boldsymbol{h}^1-P\left(\boldsymbol{t}_X\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)b_Z^1 &= \left(-P\boldsymbol{t}_Y+M\boldsymbol{t}_{X,Y}\times\hat{\boldsymbol{G}}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}, \end{cases} \tag{35}$$

$$\begin{cases} \left(P+M\boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)b_Z^1 &= -P\left(\boldsymbol{t}_Z\times\hat{\boldsymbol{G}}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}+\left(2\boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)\tilde{h}_Z, \\ 2\boldsymbol{t}_{Y,X}\cdot\boldsymbol{h}^1\pm M\boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\hat{\boldsymbol{G}}b_Z^1 &= \left(M\boldsymbol{t}_{Y,X}\mp P\boldsymbol{t}_{X,Y}\times\hat{\boldsymbol{G}}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}\pm\left(2\boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)\tilde{h}_Z. \end{cases} \tag{36}$$

6.2 緩やかな界面形状における 3 次元 Hilbert 変換演算子

(28) で定義した, 勾配 $\nabla'_{\mathrm{R}}\psi$ を含むベクトル演算子 $\hat{\boldsymbol{G}}$ は, 界面形状の変化が緩やかで $\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(X',Y')-\boldsymbol{r}(X,Y)\simeq\underline{\boldsymbol{X}}(X'-X)+\underline{\boldsymbol{Y}}(Y'-Y)$ と近似できる場合, $\underline{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{t}_X\,|\underline{\boldsymbol{X}}|$, $\underline{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{t}_Y\,|\underline{\boldsymbol{Y}}|$ より, 次のように表される.

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{G}}F(X,Y) &\equiv 2\iint_I |\underline{\boldsymbol{X}}'||\underline{\boldsymbol{Y}}'|\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'(\nabla'_{\mathrm{R}}\psi)F(X',Y') \\ &\simeq \iint_I |\underline{\boldsymbol{X}}'||\underline{\boldsymbol{Y}}'|\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'\frac{\{\underline{\boldsymbol{X}}(X'-X)+\underline{\boldsymbol{Y}}(Y'-Y)\}F(X',Y')}{2\pi\{|\underline{\boldsymbol{X}}|^2(X'-X)^2+|\underline{\boldsymbol{Y}}|^2(Y'-Y)^2\}^{3/2}} \\ &\equiv \frac{1}{|\underline{\boldsymbol{X}}||\underline{\boldsymbol{Y}}|}\left(\boldsymbol{t}_X\hat{H}_X+\boldsymbol{t}_Y\hat{H}_Y\right)\{|\underline{\boldsymbol{X}}'||\underline{\boldsymbol{Y}}'|F(X',Y')\} \qquad (37) \\ &\equiv (\boldsymbol{t}_X\hat{G}_X+\boldsymbol{t}_Y\hat{G}_Y)F(X,Y). \qquad (38) \end{aligned}$$

(37) では, 次のように定義した **3 次元 Hilbert 変換演算子** $\hat{H}_{X,Y}$ で表した.

$$\begin{pmatrix}\hat{H}_X\\ \hat{H}_Y\end{pmatrix}\{f(X',Y')\}$$
$$\equiv\iint_I\frac{|\underline{\boldsymbol{X}}|\,|\underline{\boldsymbol{Y}}|\,\mathrm{d}X'\mathrm{d}Y'}{2\pi\{|\underline{\boldsymbol{X}}|^2(X'-X)^2+|\underline{\boldsymbol{Y}}|^2(Y'-Y)^2\}^{3/2}}\begin{pmatrix}|\underline{\boldsymbol{X}}|\,(X'-X)\\ |\underline{\boldsymbol{Y}}|\,(Y'-Y)\end{pmatrix}f(X',Y'). \tag{39}$$

$\hat{H}_{X,Y}$ は, 2 次元複素解析における Hilbert 変換演算子
$\hat{H}\{f(X')\}\equiv\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}X'f(X')}{X'-X}$ を 3 次元ベクトル解析に拡張したものである. 2 次元複素解析と同様, 被演算関数を X,Y 方向に周期性のある基底関数列で展開すれば, 基底関数列の入れ替えだけで, 非積分的に扱うことができる.

(38) を用いると，$\hat{\boldsymbol{G}}$ 自身のベクトル性は積分演算の外に出すことができて，

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}_{X,Y}\times\hat{\boldsymbol{G}} = \pm\boldsymbol{t}_Z\hat{G}_{Y,X}, & \boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\hat{\boldsymbol{G}} = \hat{G}_{X,Y}, \\ \boldsymbol{t}_Z\times\hat{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{t}_Y\hat{G}_X - \boldsymbol{t}_X\hat{G}_Y, & \boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}} = 0. \end{cases} \tag{40}$$

これらを (35),(36) に適用すれば，

$$\begin{cases} p\left(\boldsymbol{t}_Y\hat{G}_X - \boldsymbol{t}_X\hat{G}_Y\right)\cdot\boldsymbol{h}^1 = -p\tilde{h}_Z, \\ 2\boldsymbol{t}_Z\hat{G}_Y\cdot\boldsymbol{h}^1 - P\hat{G}_Xb^1_Z \quad = \left(-P\boldsymbol{t}_Y + M\boldsymbol{t}_Z\hat{G}_Y\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}, \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} Pb^1_Z = -P\left(\boldsymbol{t}_Y\hat{G}_X - \boldsymbol{t}_X\hat{G}_Y\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{b}}, \\ 2\boldsymbol{t}_{Y,X}\cdot\boldsymbol{h}^1 \pm M\hat{G}_{X,Y}b^1_Z = \left(M\boldsymbol{t}_{Y,X} - P\boldsymbol{t}_Z\hat{G}_{Y,X}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{b}} \pm 2\hat{G}_{X,Y}\tilde{h}_Z. \end{cases} \tag{42}$$

6.3 2次元複素解析における界面磁場方程式との対応関係

ここで，2次元界面磁場方程式 (5) との関係を調べる．

$$\begin{cases} -\left(\mu_2\hat{H}_2 + \mu_1\hat{H}_1\right)h^1_{\mathrm{s}} = -(\mu_2+\mu_1)\,\tilde{h} + \left(\hat{H}_2 - \hat{H}_1\right)\tilde{b}, \\ \left(\hat{H}_2/\mu_2 + \hat{H}_1/\mu_1\right)b^1_{\mathrm{n}} = (1/\mu_2 + 1/\mu_1)\,\tilde{b} + \left(\hat{H}_2 - \hat{H}_1\right)\tilde{h}. \end{cases} \tag{43}$$

ただし，2次元複素解析の x-y 平面に，今は x-z 平面が対応する．

$\boldsymbol{t}_Y$ が場所によらず，諸量が Y 方向に一様とすれば，$\hat{G}_Y$ は Y 方向の微分と共に 0 となり，さらに，$\boldsymbol{t}_Z\times\hat{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{t}_Y\hat{G}_X$．また (30) より，$\boldsymbol{t}_Y\cdot\boldsymbol{h}^1 = h^1_X$, $\boldsymbol{t}_Y\cdot\tilde{\boldsymbol{b}} = \tilde{b}_X$．これらを (41) に用いれば，

$$\begin{cases} p\hat{G}_Xh^1_X = -p\tilde{h}_Z, \\ P\hat{G}_Xb^1_Z = \quad P\tilde{b}_X. \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \text{緩やかな} \\ \text{2次元界面形状} \end{bmatrix} \tag{44}$$

(43) の $-h^1_{\mathrm{s}}$, b^1_{n}, $\tilde{h}$, $\tilde{b}$ には，h^1_X, b^1_Z, $\tilde{h}_Z$, $\tilde{b}_X$ が対応する．伸縮 Hilbert 変換 $\hat{H}_2 \equiv e^{-\tau}\hat{H}e^{\tau}$, $\hat{H}_1 \equiv e^{\tau}\hat{H}e^{-\tau}$ は，下半面・上半面で異なる等角写像を用いて生じる磁束線の断絶を，$e^{\pm\tau}$ による空間の伸び縮みで修復する．しかしここでは，下半面・上半面で共通な Flat Space と Real Space の対応関係を用いるため，$\hat{H}_2 = \hat{G}_X$, $\hat{H}_1 = \hat{G}_X$ となる ($e^{\pm\tau}$ に $|\underline{\boldsymbol{X}}|$ が対応する)．こうして書き直した (43) は，(44) に一致する．

6.4 3次元ベクトル解析のための界面磁場方程式

(26) によれば，$\tilde{h}_Z = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\boldsymbol{t}_Z\cdot\boldsymbol{h}^0$, $\tilde{b}_{X,Y} = 0$ なので，$\tilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$ となる．これを (36), (42) に用いると，

$$\begin{cases} \left(P + M\boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right) b^1_Z &= \left(2\boldsymbol{t}_Z\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)\tilde{h}_Z, \\ 2\boldsymbol{t}_{Y,X}\cdot\boldsymbol{h}^1 \pm M\boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\hat{\boldsymbol{G}}b^1_Z &= \pm\left(2\boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\hat{\boldsymbol{G}}\right)\tilde{h}_Z, \end{cases} \quad \begin{bmatrix}\text{一般的な} \\ \text{3 次元界面形状}\end{bmatrix} \tag{45}$$

$$\begin{cases} Pb^1_Z = 0, \\ 2\boldsymbol{t}_{Y,X}\cdot\boldsymbol{h}^1 \pm M\hat{G}_{X,Y}b^1_Z = \pm 2\hat{G}_{X,Y}\tilde{h}_Z. \end{cases} \quad \begin{bmatrix}\text{緩やかな} \\ \text{3 次元界面形状}\end{bmatrix} \tag{46}$$

特に，界面形状が緩やかな (46) からは，未知の誘導場が $b^1_Z = 0$, $h^1_{X,Y} = \pm\boldsymbol{t}_{Y,X}\cdot\boldsymbol{h}^1 = \hat{G}_{X,Y}\tilde{h}_Z$ のように直接求められてしまう．これより，基本場と誘導場を合わせた界面磁場は以下のようになる．

$$\begin{cases} h_{X,Y} = h^0_{X,Y} + h^1_{X,Y} = \boldsymbol{t}_{X,Y}\cdot\boldsymbol{h}^0 + \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\hat{G}_{X,Y}\boldsymbol{t}_Z\cdot\boldsymbol{h}^0, \\ b_Z = b^0_Z + b^1_Z = \dfrac{2\boldsymbol{t}_Z\cdot\boldsymbol{h}^0}{1/\mu_2 + 1/\mu_1}. \end{cases} \tag{47}$$

(45) では，$\hat{\boldsymbol{G}}$ を定義 (28) どおり扱う必要があるが，これは，界面形状の緩急に関わらず，3次元解析で実用的に扱える界面磁場方程式である．

7 まとめと今後の課題

磁性流体自由表面解析では，複雑な界面形状であっても，界面磁場を正確に求めることが重要になる．このための調和場解析を，次元間対応により，2次元複素解析から3次元ベクトル解析へ拡張した．

調和性を扱うため，Hilbert 変換の代わりに，Green の定理, Cauchy の積分公式を参照して3次元調和場方程式を導いた．調和場を基本場と誘導場に分けると，特異点による場は基本場に含めて考慮できる．誘導場は，基本場と合わせたとき，界面磁場が界面条件を満たすように決める．このため，界面条件を調和場方程式に組み込み，3次元界面磁場方程式をいくつか導いた．

2次元複素解析では，Flat Space で与えた既知の外部磁場分布の等角写像から界面磁場を求めることにしたため，下半面・上半面で異なる写像変換を

用いることになり，(43) がやや複雑になった．しかし3次元ベクトル解析では，流体領域・真空領域で Flat Space と Real Space の対応関係が共通になり，界面磁場方程式が (45), (46) のように簡潔になる．

(45) などを解くには，(43) を解いたときと同様 [1, 5]，3次元 Hilbert 変換演算子 $\hat{H}_{X,Y}$ の性質を利用できるよう，未知量 $\boldsymbol{h}^1$, b_Z^1 を X, Y 方向に周期性のある基底関数列で展開し，展開係数を逆演算子法で求める．現在，任意形状の界面上で界面磁場を求め，さらに3次元磁性流体自由表面解析への適用を進めている．

参考文献

[1] 水田　洋: 磁性流体自由表面解析における界面磁場方程式の解の検証; 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **1311**, p.111 (2003).

[2] 水田　洋: 複雑変形した磁性流体自由表面でも有効な界面磁場決定方法; 第15回「電磁力関連のダイナミックス」シンポジウム講演論文集, p.179 (2003).

[3] 水田　洋: 磁性流体表面現象解析の3次元化; 京都大学数理解析研究所講究録「波の非線形現象の数理とその応用」, p.109 (2005).

[4] 水田　洋: 磁性流体自由表面解析における3次元界面磁場方程式; 日本流体力学会2005年会講演論文集 (http://www.nagare.or.jp/nenkai/cd-rom/paper/), AM05-16-014 (2005).

[5] 水田　洋: 磁性流体の表面形状決定における不連続性; 京都大学数理解析研究所講究録「波動の非線形現象とその応用」, **1368**, p.127 (2004).